GRAFOS, DIGRAFOS Y ÁRBOLES

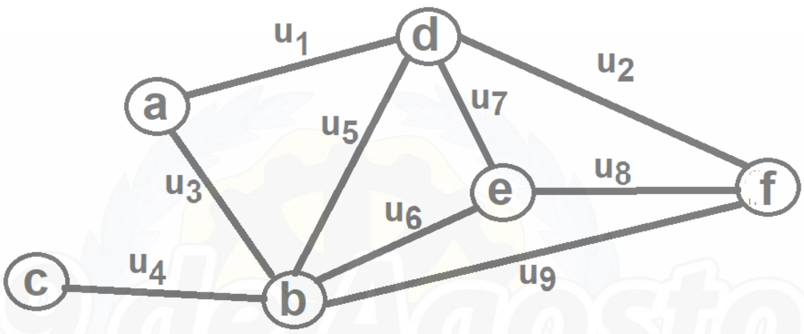
I. GRAFOS

1. Dado el siguiente grafo: G = ({ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } , { a , b , c , d , e , f , g } , φ)

x	a	b	c	d	e	f	g
φ(x)	{1,2}	{1,3}	{5,3}	{6,6}	{3,6}	{3,5}	{1,6}

a) Hacer el diagrama del mismo.
b) Indicar si hay algún vértice aislado, si hay bucles y si hay aristas paralelas.
c) Indicar todas las aristas incidentes en el vértice 3.
d) Indicar dos aristas adyacentes a “b”

2. Dado el grafo G = (V , A , φ) por su diagrama:



a) Escribir, formalmente, al grafo (indicar los conjuntos V, A y la función φ.
b) ¿Es un grafo simple? Justificar.
c) Hacer la matriz de adyacencia y la de incidencia.
d) Indicar los grados de todos los vértices.
e) Inicar dos caminos distintos entre “a” y “f” y sus longitudes.
f) Indicar un ciclo de longitud 3 y uno de longitud 5.

3. Resolver analíticamente, sin hacer el diagrama:

Un grafo tiene 4 vértices de grado 5, 8 vértices de grado 4, x vértices de grado 3, 7 vértices de grado 2 y 6 de grado 1. Calcular la cantidad total de vértices, sabiendo que, en total, hay 45 aristas.

4. Indicar si es posible que los grados de los vértices de un grafo G sean:

a) 8, 8, 7, 6, 5, 5, 5, 4, 3, 2
b) 9, 9, 6, 6, 4, 4, 3, 2, 2, 1

5. Sea G : (V , A , φ) un grafo simple con |V|=15 y |A|=58. Indicar, justificadamente, si la siguiente secuencia de grados puede corresponder a dicho grafo. 1, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 10, 14, 14, 14

6. Responder, justificando:

a) ¿Es posible que un grafo simple de 8 vértices tenga 30 aristas en total?
b) ¿Los grafos bipartitos completos $K_{2,6}$ y $K_{3,4}$ tienen la misma cantidad de aristas?
c) ¿Es posible que un grafo simple tenga todos los vértices de distintos grados?

7. Dado el grafo: G = ({ 1, 2, 3, 4, 5, 6 } , { a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_5 , a_6 , a_7 , a_8 , a_9 , a_{10} } , φ)

x	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
φ(x)	{2,5}	{2,1}	{1,4}	{2,4}	{3,5}	{4,3}	{4,6}	{5,6}	{5,4}	{3,2}

a) Hacer el diagrama del grafo e indicar si es conexo.
b) Si es posible, hallar un camino de Euler. ¿Se puede encontrar un ciclo de Euler?. Justificar.
c) Indicar qué vértices y aristas hay que suprimir para que el subgrafo resultante sea el grafo bipartito completo $K_{3,2}$.

8. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, demostrando o justificando correctamente:

a) Si en un grafo hay ciclo de Euler entonces también hay ciclo de Hamilton.
b) Todos los grafos simples de 6 vértices y 11 aristas son conexos.
c) Un grafo simple con 8 vértices y 16 aristas puede no ser conexo.
d) Todo grafo simple conexo con 6 vértices que no es k-regular, es plano.

9. Dada la matriz de adyacencia de un grafo G:

$$Ma(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hacer el diagrama del grafo sabiendo que V = { 1, 2, 3, 4, 5 }
b) ¿Es un grafo k-regular? Justificar
c) Si no es k-regular, indicar, si es posible, las aristas que habría que suprimir para que lo sea. Justificar.

10. Considerar el grafo completo K_n:

a) Hallar la cantidad de aristas. Justificar.
b) Indicar para qué valores de n tiene camino de Euler. Justificar
c) Indicar para qué valores de n tiene caminos de Hamilton. Justificar.
d) Indicar para qué valores de n es grafo plano. Justificar.
e) Indicar la forma de la matriz de adyacencia.

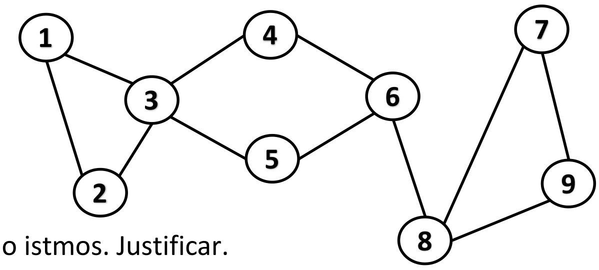
11. Considerar un grafo bipartito $K_{n,m}$

a) Hallar las cantidades de vértices y de aristas. Justificar.
b) Indicar para qué valores de n y m tiene camino de Euler. Justificar
c) Indicar para qué valores de n y m tiene caminos de Hamilton. Justificar.
d) Indicar para qué valores de n y m es grafo plano. Justificar.
e) Indicar la forma de la matriz de adyacencia.

12. Dado un grafo simple G = (V, A, φ) con |V|=2k, cuya matriz de adyacencia es $M_A(G) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ siendo A, B, C submatrices de orden k. Indicar si es cierto que:

a) Si B = N (matriz nula) entonces el grafo es conexo
b) Si A = C = N (matriz nula) entonces el grafo es bipartito
c) Si A = C = N (matriz nula) y b_0=1 ∀ i,j entonces hay un ciclo de Euler

13. Dado el siguiente grafo:



a) Indicar todos los puntos de corte o istmos. Justificar.

b) Indicar las aristas puentes. Justificar.

c) Indicar un conjunto de corte de dos elementos.

14. Dado un grafo G = (V, A, φ) con |V| = 12 y |A| = 56, indicar cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta. Justificar las respuestas:

a) G necesariamente es conexo

b) G puede ser simple

c) G necesariamente tiene ciclo de Euler

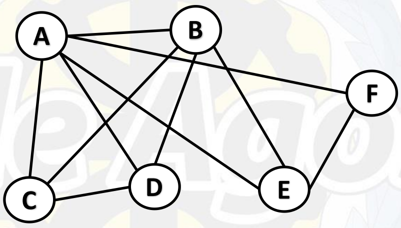
d) G puede ser regular

15. En el conjunto de vértices de un grafo se define la relación R:

$$v_i \, R \, v_j \Leftrightarrow g(v_i) = g(v_j) \text{ donde g es la función grado.}$$

Se pide:

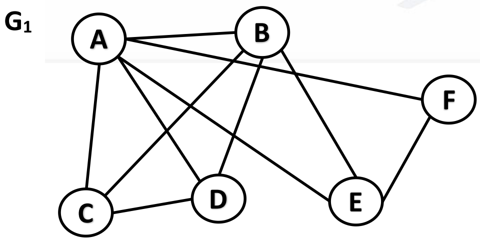
a) Hallar el conjunto cociente para el siguiente grafo:

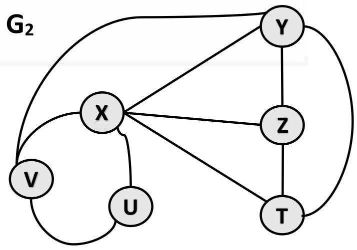


b) Indicar V o F, justificando:

"Si un grafo no es conexo, el conjunto cociente del conjunto de vértices por la relación R tiene al menos dos clases de equivalencia"

16. Dados los siguientes grafos G_1 y G_2:

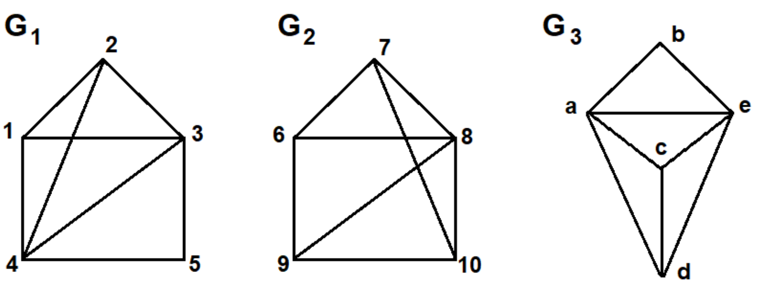




a) Definir un isomorfismo entre ellos. Justificar.

b) En el grupo G_2 indicar qué arista habría que suprimir para que X sea istmo. Justificar.

17. Dados los siguientes grafos G_1 , G_2 y G_3, indicar cuáles son isomorfos, justificando correctamente.



18. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando correctamente:

a) Si dos grafos son isomorfos, entonces tienen la misma cantidad de vértices y de aristas.

b) Si dos grafos tienen la misma cantidad de vértices y aristas, son isomorfos.

c) Si un grafo tiene un ciclo de longitud e, entonces todo grafo isomorfo a él debe tener un ciclo de longitud 3.

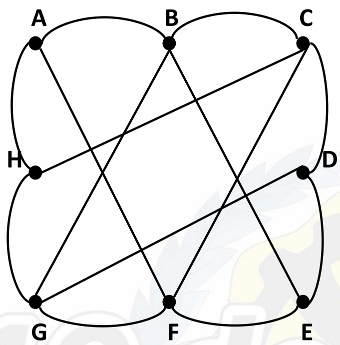
d) Si dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos, es posible escribir sus matrices de adyacencia de tal forma que $M_A(G_1) = M_A(G_2)$

e) Si dadas las matrices de adyacencia $M_A(G_1) \neq M_A(G_2)$ entonces G_1 y G_2 NO son isomorfos.

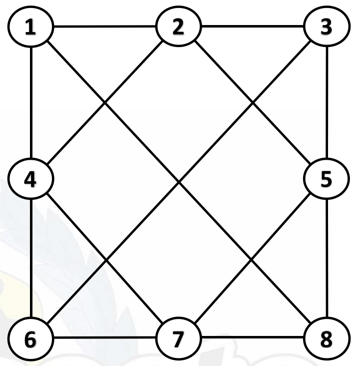
f) Si un grafo G_1 es isomorfo a otro grafo G_2, que tiene ciclo de Euler, entonces todos los vértices de G_1 tienen grado par.

19. Analizar si los siguientes pares de grafos son isomorfos. En caso afirmativo, definir el isomorfismo. De lo contrario, justificar correctamente:

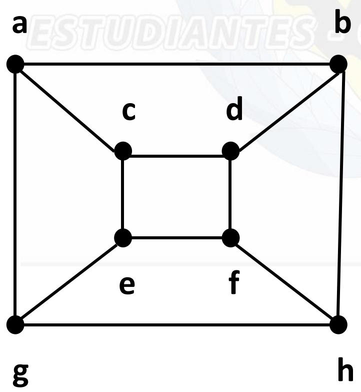
a) G_1



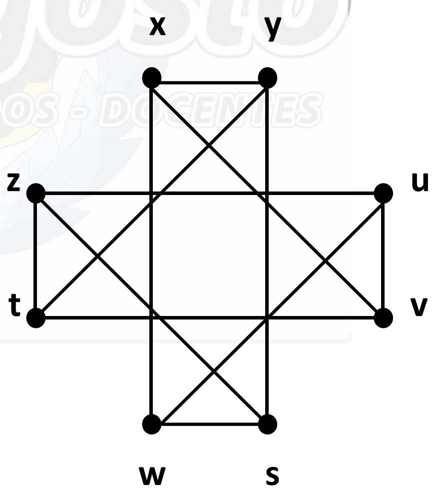
G_2



b) G_1



G_2



II. DIGRAFOS

20. Sea el digrafo: D = (V , A , φ) con los conjuntos V = { a, 2, 3, 4, 5, 6 } y A = { a, b, c, d, e, f, g, h, i } y la función de incidencia dada por la siguiente tabla:

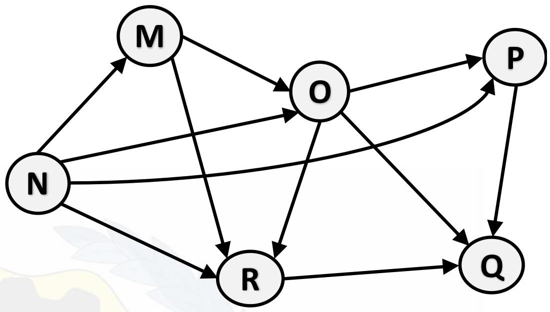
x	a	b	c	d	e	f	g	h	i
φ(x)	(2,1)	(1,3)	(4,3)	(2,3)	(3,4)	(5,4)	(3,5)	(6,4)	(3,6)

a) Hacer el diagrama e indicar el grado positivo y el negativo de cada vértice.

b) Escribir la matriz de Adyacencia y la de Incidencia.

c) Analizar si existe algún camino de Euler. Justificar.

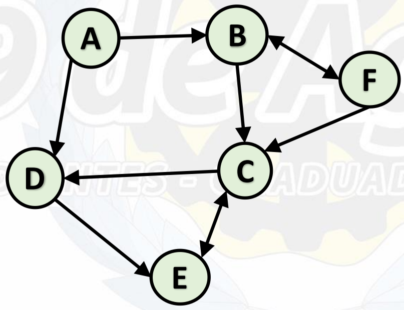
21. Dado el siguiente dígrafo:



a) Indicar si es conexo y si es fuertemente conexo.

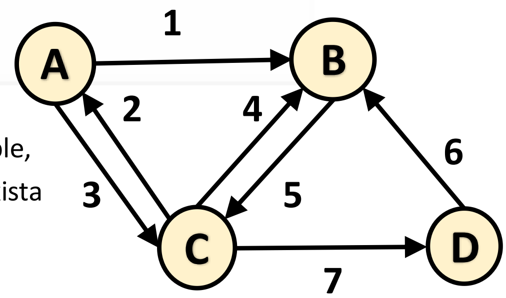
b) ¿Hay algún pozo? ¿Y alguna fuente? Justificar

22. Dado el dígrafo:



Analizar si es conexo, fuertemente conexo, justificando. De no ser fuertemente conexo, indicar componentes fuertemente conexas.

23. Dado el siguiente dígrafo:

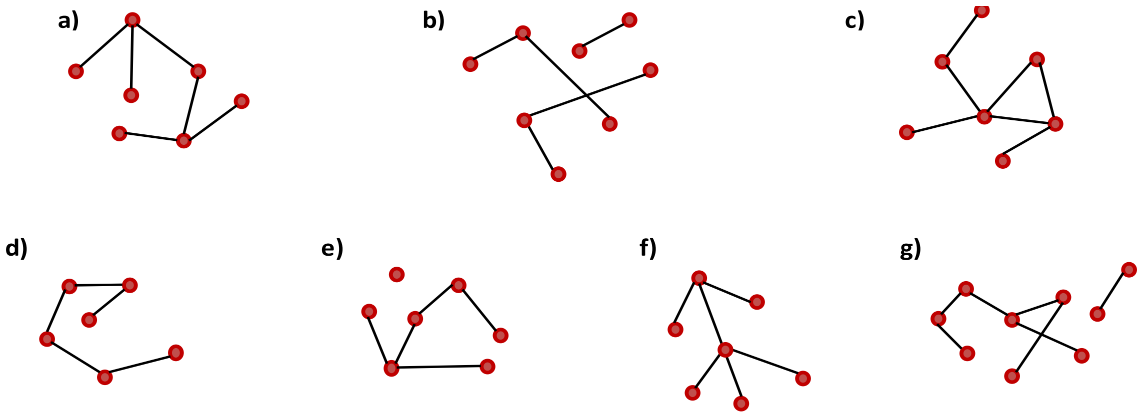


a) ¿Es conexo este dígrafo? ¿Y fuertemente conexo?

b) Indicar el grado positivo y negativo de cada vértice y, si es posible, un camino de Euler. Si no es posible, indicar qué aristas habría que agregar para que exista camino de Euler. Justificar.

III. ÁRBOLES

24. Indicar cuáles de los siguientes grafos es árbol. Para los que no sean árboles, analizar si son bosques y, en caso afirmativo, indicar la cantidad de componentes:



25. Demostrar que:

    a) En todo árbol se cumple que: |V| = |A| + 1
    b) La suma de los grados de los vértices de todo árbol de n vértices es igual a 2n-2
    c) Todo árbol es un grafo bipartito

26. Hallar la cantidad de vértices de un árbol, sabiendo que tiene 2 vértices de grado 2, 2 vértices de grado 3, 3 vértices de grado 4 y los restantes de grado 1.

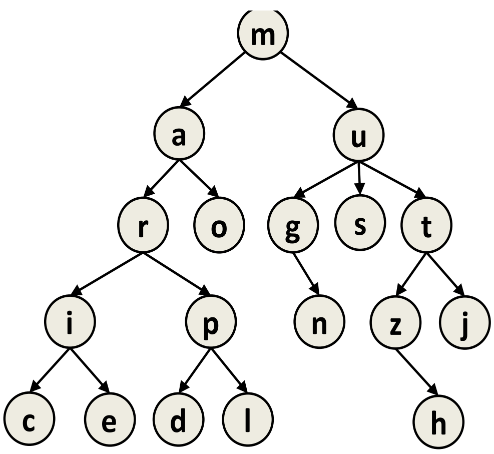
27. Indicar V o F, justificando correctamente:

    a) Algún vértice interno de un árbol puede no ser punto de corte.
    b) Todos los grafos G = (V , A , φ) con |A| = |V| - 1 son árboles.

28. Sea G = (V , A , φ) un grafo con 42 vértices de grado 2, 15 de grado 3, 21 de grado 4, 7 de grado 5 y el resto de grado 1. Se pide:

    a) ¿Podría tratarse de un árbol? Justificar correctamente y, en cao afirmativo, indicar la cantidad de vértices y aristas del árbol.
    b) Si además se supiera que |A| = 130, ¿cuántas aristas habría que suprimir para que se obtenga un árbol? Justificar.

29. Dado el siguiente árbol dirigido con raíz:



a) Indicar cuál es la raíz y cuáles sus hojas.

b) Indicar el padre y los hijos de **i**

c) Indicar todos los descendientes de **u**

d) Analizar si es un árbol balanceado.

e) Indicar todos los vértices del nivel 2

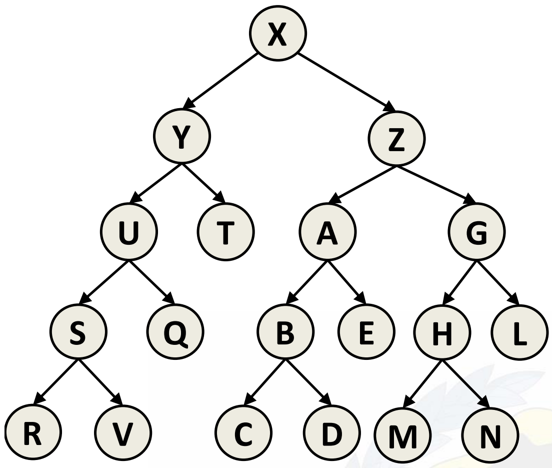
f) Clasificar al grafo como n-ario (indicar el valor de n) y si es regular o completo. Justificar.

g) Indicar un subárbol que sea binario regular de altura 2

30. Hallar y responder, justificando:

a) La cantidad de hojas de un árbol ternario regular completo de altura h
b) La cantidad total de vértices de un árbol binario regular completo de altura h
c) La altura mínima de un árbol binario que tenga 1000 vértices
d) La cantidad máxima y mínima de vértices de un árbol cuaternario regular no completo de altura 3. En cada uno de esos casos, indicar la cantidad de hojas

31. Sea el árbol binario:



a) Dar el recorrido en **orden previo (pre-orden)**

b) Dar el recorrido en **orden simétrico (in orden)**

c) Dar el recorrido en **orden posterior (post orden)**

32. Para la siguiente expresión dada en notación polaca inversa:

A B • C D / E + - F G H • + /

Se pide recuperar el árbol, indicar la raíz, las hojas, la altura y si es balanceado Dar el recorrido del árbol en orden previo (notación polaca)

33. Dada la expresión en notación polaca inversa:

9 6 3 / 4 + • 8 5 2 2 ^ - / -

a) Hallar el árbol correspondiente, indicar su altura y si es balanceado.
b) Calcular el resultado de la expresión

34. Sea la siguiente expresión dada en notación polaca:

• + - A • BC D / + D E • + F G H

a) Recuperar el árbol, indicar la raíz, las hojas y los vértices intermedios
b) Dar el recorrido del árbol en orden simétrico (notación usual infija)

35. Construir el árbol correspondiente a la expresión lógica:

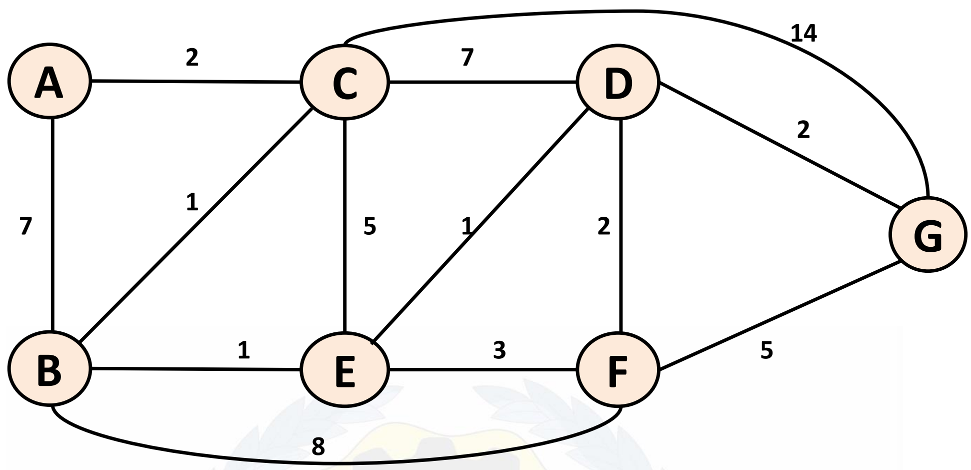
p v (q ^ r) ⇔ r ^(q => p ^ q)

Recorrerlo en orden previo y en orden posterior.

IV. EJERCICIOS APLICADOS

Los siguientes ejercicios son ilustrativos de aplicaciones de la teoría de grafos, dígrafos y árboles. Si bien para algunos de ellos se necesitan algunos conceptos o métodos que no hemos visto en esta asignatura, igualmente se pueden resolver de una manera intuitiva o no metódica.

36. El siguiente grafo representa 7 ciudades (A, B, C, D, E, F y G) unidas por carreteras (representadas con las aristas), siendo los valores que aparecen sobre ellas los costos de circulación:



a) ¿Es posible recorrer todas las carreteras una sola vez? ¿De qué ciudad hay que partir y a cuál llegar? Justificar.

b) ¿Qué arista se debe eliminar para que se puedan recorrer todas las carreteras una sola vez y volver al punto de partida? Indicar el ciclo euleriano.

c) Si se desea recorrer todas las ciudades una sola vez por cada una sin necesidad de pasar por todas las carreteras y con el menor costo, ¿qué ciclo se recomienda? Esto sería hallar un ciclo hamiltoniano de costo mínimo.

37. Alicia hizo una reunión y asistieron sus amigas Beatriz, Cecilia, Diana, Elsa, Fernanda y Gabriela. Beatriz conversó exactamente con 3 de las restantes. Cecilia y Elsa conversaron con 2 del resto cada una. Diana, Fernanda y Gabriela conversaron con una sola de las restantes cada una. En total hubo 7 conversaciones.

Responder:

a) ¿Con cuántas personas habló Alicia?

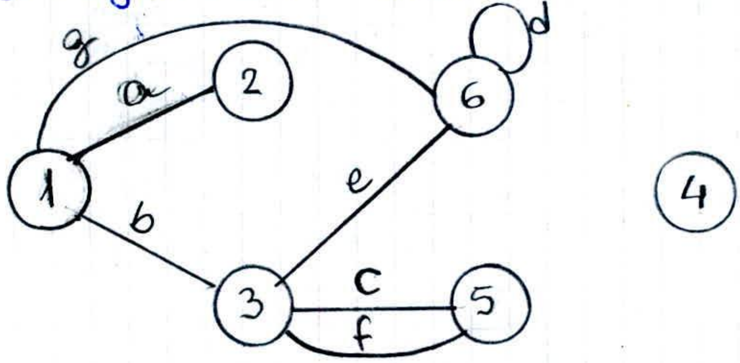
b) Con esta información solamente, ¿se puede decir exactamente con quiénes conversó Alicia? Justificar.

I GRAFOS

1) Dado el siguiente grafo $G = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{a,b,c,d,e,f,g\}, \varphi)$

x	a	b	c	d	e	f	g
$\varphi(x)$	{1,2}	{1,3}	{5,3}	{6,6}	{3,6}	{3,5}	{1,6}

a) Hacer el diagrama del mismo



b) Indicar si hay algún vértice aislado, si hay bucles y si hay aristas paralelas

Vértice aislado : 4 bucle : d aristas paralelas: c , f

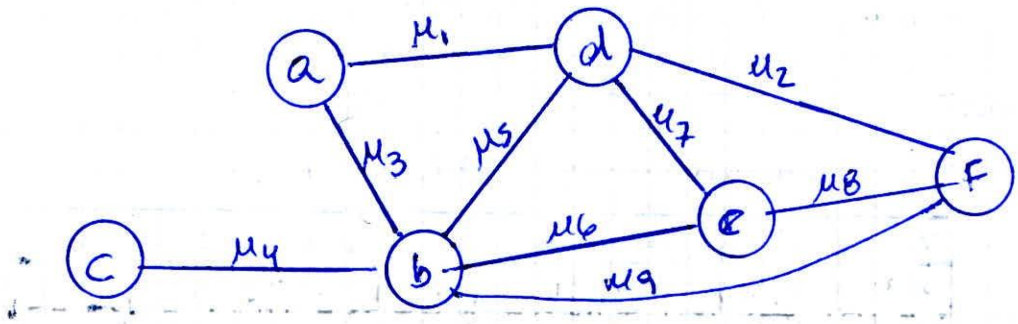
c) Indicar todas las aristas incidentes en el vértice 3.

aristas incidentes a 3 = {b, e, c, f}

d) Indicar dos aristas adyacentes a "b"

a y e

② Dado el grafo $G = (V, A, \varphi)$ por su diagrama:



a) Escribir formalmente al grafo (indicar los conjuntos V, A y la función φ)

$$G = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9\}, \varphi)$$

$\varphi(\mu_1) = \{a, d\}$ $\varphi(\mu_2) = \{d, f\}$ $\varphi(\mu_3) = \{a, b\}$ $\varphi(\mu_4) = \{c, b\}$

$\varphi(\mu_5) = \{b, d\}$, $\varphi(\mu_6) = \{b, e\}$, $\varphi(\mu_7) = \{d, e\}$, $\varphi(\mu_8) = \{e, f\}$, $\varphi(\mu_9) = \{b, f\}$

b) ¿Es un grafo simple? Justificar.

Es simple pues no hay aristas paralelas ni bucles

d) Hacer la matriz de adyacencia y la de incidencia

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	1	0	0
b	1	0	1	1	1	1
c	0	1	0	0	0	0
d	1	1	0	0	1	1
e	0	1	0	1	0	1
f	0	1	0	1	1	0
	2	5	1	4	3	3

$\mu \Rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
a	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
b	0	0	1	1	1	1	0	0	1	5
c	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
d	1	1	0	0	1	0	1	0	0	4
e	0	0	0	0	0	1	1	1	0	3
f	0	1	0	0	0	0	0	1	1	3

d) Indicar los grados de todos los vértices

$$gr(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = c \\ 2 & \text{si } x = a \\ 3 & \text{si } x \in \{e, f\} \\ 4 & \text{si } x = d \\ 5 & \text{si } x = b \end{cases}$$

e) Indicar dos caminos distintos entre "a" y "f" y sus longitudes

$C_1 = \{a, \mu_1, d, \mu_2, f\} \Rightarrow long(C_1) = 2$ $C_2 = \{a, \mu_3, b, \mu_9, f\}$ $long(C_2) = 2$

f) Indicar un ciclo de longitud 3 y uno de longitud 5

long 3 : $\{a, \mu_1, d, \mu_5, b, \mu_3, a\}$ long 5: $\{b, \mu_6, e, \mu_8, f, \mu_2, d, \mu_1, a, \mu_3, b\}$

GRAFOS

3) Resolver, analíticamente, sin hacer el diagrama:

Un grafo tiene 4 vértices de grado 5, 8 vértices de grado 4, x vértices de grado 3, 7 vértices de grado 2 y 6 de grado 1.
Calcular la cantidad total de vértices sabiendo que, en total, hay 45 aristas

$$\sum_{i=1}^{m} gr(i) = 2|A| \Rightarrow 4\times5 + 8\times4 + x\,3 + 7\times2 + 6\times1 = 2\times45$$
$$3x + 72 = 90$$
$$\boxed{x = 6}$$

$$\Rightarrow |V| = 4 + 8 + 6 + 7 + 6 = 31 \Rightarrow \boxed{|V| = 31}$$

4) Indicar, si es posible, que los grados de los vértices de un grafo G sean:

a) 8, 8, 7, 6, 5, 5, 5, 4, 3, 2

$8+8+7+6+5+5+5+4+3+2 = 53 = \sum_{i=1}^{m} gr(i)$, $\nexists k \in \mathbb{Z} / 53 = 2k \Rightarrow$ NO ES POSIBLE

b) 9, 9, 6, 6, 4, 4, 3, 2, 2, 1

$9+9+6+6+4+4+3+2+2+1 = 46 \Rightarrow$ hay 23 aristas ✓ ES POSIBLE

5) Sea $G = (V, A, \varphi)$ un grafo SIMPLE con $|V| = 15$ y $|A| = 58$.
Indicar, justificadamente, si la sig. secuencia de grados puede corresponder a dicho grafo: 1, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 10, 14, 14, 14

$$\sum_{i=1}^{15} gr(i) = 116 = 2\times|A| = 2 \cdot 58 \checkmark$$

NO puede corresponder

Pero hay 3 vértices que tienen $gr. = |V|-1 = 14 \Rightarrow$ hay 3 vértices adyacentes con TODOS $\Rightarrow$ No es posible que haya vértices con grado <3, y $\exists\, gr = 1$

6) Responder, justificando:

a) ¿Es posible que un grafo simple de 8 vértices tenga, en total, 30 aristas?

No. La máxima cantidad de aristas que puede tener es 28 (es la cantidad de aristas que tiene un K_8).

b) Los grafos bipartitos completos $K_{2,6}$ y $K_{3,4}$ ¿tienen la misma cantidad de aristas?

Sí. Ambos tienen 12 aristas (2×6 y 3×4)

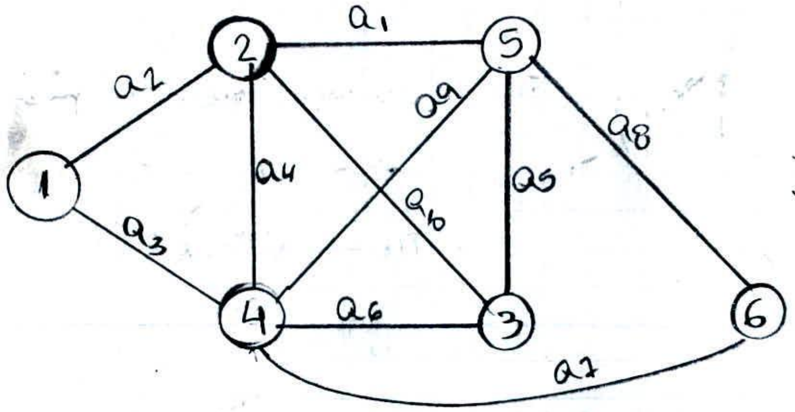
c) ¿Es posible que un grafo simple tenga todos los vértices de ≠ grado?

No.

⑦ Dado el grafo $G = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}\}, \varphi)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$\varphi(a)$	$\{2,5\}$	$\{2,1\}$	$\{1,4\}$	$\{2,4\}$	$\{3,5\}$	$\{4,3\}$	$\{4,6\}$	$\{5,6\}$	$\{5,4\}$	$\{3,2\}$

a) Hacer el diagrama del grafo e indicar si es conexo.



es conexo
todos los vértices pueden llegar al resto de los vértices

b) Si es posible, hallar un camino de Euler ¿se puede encontrar un ciclo de Euler? Justificar

$gr(1) = gr(6) = 2 \quad gr(2) = gr(5) = 4 \quad gr(3) = 3 \quad gr(4) = 5$

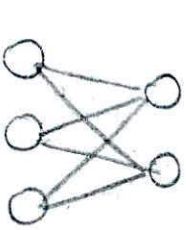
todos pares menos 2 ✓ $\Rightarrow$ Se puede hallar un camino de Euler (Se parte de un vértice con grado impar)

$C = \{4, a_3, 1, a_2, 2, a_1, 5, a_8, 6, a_7, 4, a_4, 2, a_{10}, 3, a_6, 4, a_9, 5, a_5, 4\}$

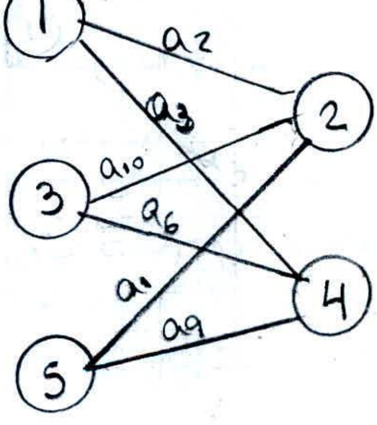
No se puede encontrar ciclo euleriano porque hay 2 vértices con grado impar.

c) Indicar qué vértices y aristas hay que suprimir para que el subgrafo resultante sea el grafo bipartito completo $K_{3,2}$

$K_{3,2}$



2 de grado 3
3 de grado 2



Quitar: a_4, a_5, a_7, a_8 } aristas

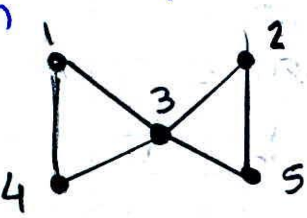
Vértice a sacar 6

GRAFOS

8) Indicar el valor de verdad de las sig. proposiciones, demostrando o justificando correctamente:

a) Si en un grafo hay ciclo de Euler, entonces también hay ciclo de Hamilton

(F)



todos los vértices son de grado par ⇒ tiene ciclo de Euler

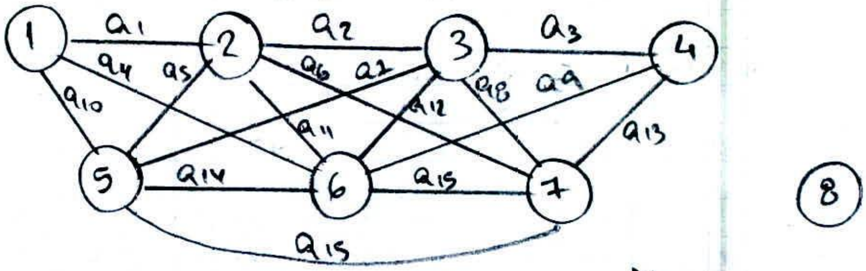
Pero no es ciclo hamiltoniano pues no hay camino simple que pase por todos los vértices

b) todos los grafos simples de 6 vértices y 11 aristas son conexos

(V) Si quiero encontrar un grafo no conexo, aislo un vértice. Con los 5 restantes armo un K_5 completo y solo logro tener 10 aristas ∴ si tengo 11, es porque el que pensé que podía dejar aislado, quedó conectado

c) Un grafo simple con 8 vértices y 16 aristas puede no ser conexo

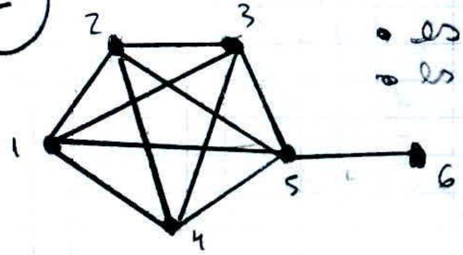
(V)



No es conexo

d) todo grafo simple conexo con 6 vértices que no es k-regular, es plano

(F)



- es simple (no tiene aristas paralelas ni bucles)
- es conexo (todos los vértices se conectan)

$gr(6) = 1 \quad gr(2) = 4 \Rightarrow gr(6) \neq gr(2)$

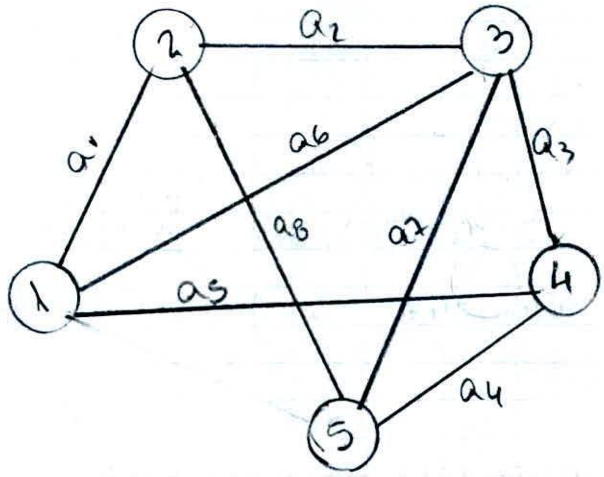
pero NO es plano

(9) Dado la matriz de adyacencia de un grafo G:

$$M_G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

Se pide:

a) Hacer el diagrama del grafo sabiendo que $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



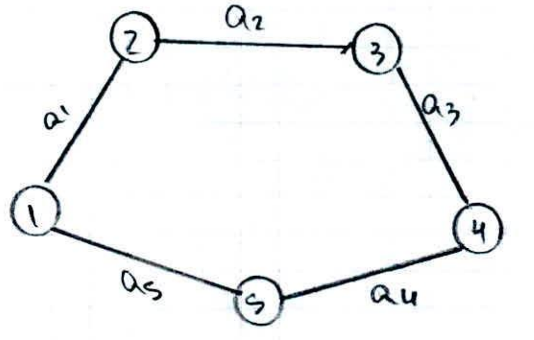
b) ¿Es G un grafo k-Regular? Justificar

No, pues $\left.\begin{array}{l} gr(1) = 3 \\ gr(4) = 2 \end{array}\right\rangle \neq$

c) Si no es k-regular, indicar, si es posible las aristas que habría que suprimir para que lo sea. Justificar

Para que sea k-regular, hay que llevar los grados al mínimo (el del vértice 4 ⇒ $gr(4) = 2$)

Se puede quitar a_6, a_7 y a_8 y todos los vértices quedan de grado 2 ⇒ 2-regular



GRAFOS

(10) Considerar un grafo completo K_n

a) Hallar la cantidad de aristas. Justificar

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2|A|$$

si es grafo completo $K_n \Rightarrow$ los n vértices tienen grado $= n-1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = n(n-1) = 2|A| \Rightarrow \boxed{|A| = \frac{n^2-n}{2}}$$

b) Indicar para qué valores de n, tiene camino de Euler. Justificar

Los grados de los vértices tienen que ser par $\therefore$ $n-1$ tiene que ser par $\Rightarrow n-1 = 2k \Rightarrow \boxed{n = 2k+1}$ (n impar) $k \in \mathbb{Z}$

Y el K_2 también, pues tiene "todos los grados pares MENOS 2"

c) Indicar para qué valores de n, tiene camino de Hamilton. Justificar

$\forall n \in \mathbb{N}$, ya que es un grafo completo y $\exists$ camino que pasa por todos los vértices sin repetirlos

d) Indicar para qué valores de n, es grafo plano. Justificar

K_n es plano para $n \in [1, 4]$. A partir de $n=5$ no es plano

e) Indicar la forma de la matriz de adyacencia

tiene todos 1, salvo en la diag. principal, que tiene todos 0

(11) Considerar un grafo bipartito completo $K_{n,m}$

a) Hallar las cantidades de vértices y de aristas

$|V| = n + m$ $\qquad$ $|A| = n \cdot m$

b) Indicar para qué valores de n y m tiene camino de Euler.

$\text{si } \underbrace{n = 2k+1}_{\text{impar}}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$ } todos los vértices serán pares, salvo 2

$\vee$ si $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 2$

$\vee$ $n = m = 1 \Rightarrow gr(v_1) = gr(v_2) = 1$

$\vee$ $n = 2k \wedge m = 2t$, con $k, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ todos grados pares

c) Indicar para qué valores de n y m tiene camino de Hamilton

Esto ocurre si $n = m$ o si $\underbrace{(m - n = 1 \text{ o } n - m = 1)}_{|n-m| = 1}$

d) Indique para qué valores de n y m es grafo plano.

$n \leq 2 \vee m \leq 2$

e) Indicar la forma de la matriz de adyacencia.

	1	2	3	…	n	n+1	n+2	…	n+m
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	0	0	1	1	1	1
:	·	·	·	·	·	1	1	1	1
:	0	0	0	0	0	1	1	1	1
n	0	0	0	0	0	1	1	1	1
n+1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
n+2	1	1	1	1	1	0	0	0	0
:	1	1	1	1	1	0	0	0	0
:	1	1	1	1	1	0	0	0	0
n+m	1	1	1	1	1	0	0	0	0

GRAFOS

(12) Dado un grafo simple $G=(V, A, \varphi)$ con $|V| = 2k$ cuya matriz de adyacencia es $M_A(G) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ con A, B, C submatrices de orden k.

Indicar si es cierto que:

a) Si $B = N$ (matriz nula) entonces el grafo es conexo

(F) Los primeros k vértices no están conectados con los segundos k vértices

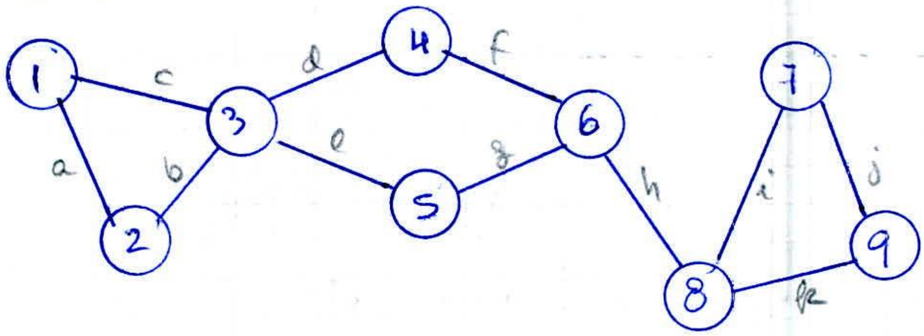
b) Si $A=C=N$ entonces el grafo es bipartito

(V) Se ve en el ej. 11, e) en el que se muestra cómo queda una Matriz de adyacencia de los grafos bipartitos

c) Si $A=C=N$ y $b_{ij} = 1 \ \forall i,j$ entonces hay ciclo de Euler

(F) Solo sucede si k es par. Caso contrario, todos los grados de los vértices serían impares

(13) Dado el sig. grafo:



a) Indicar todos los puntos de corte o istmos. Justificar.

Istmos: 6, 8, 3

b) Indicar las aristas puentes

Arista puente: {h}

c) Indicar un conjunto de corte de dos elementos

Hay muchos. Voy a escribir algunos

$B_1 = \{a, b\}$

$B_2 = \{b, c\}$

$B_3 = \{c, a\}$

$B_4 = \{d, e\}$

$B_5 = \{f, g\}$

$B_6 = \{i, k\}$

$B_7 = \{k, j\}$

$B_8 = \{e, f\}$

(14) Dado un grafo $G = (V, A, \varphi)$ con $|V| = 12$ y $|A| = 56$ indicar cuáles de los sig. afirmaciones son correctas. Justificar:

a) G necesariamente es conexo

(F) De un vértice pueden salir las 56 aristas a otro vértice y el resto de los vértices están aislados $\Rightarrow$ no es conexo

b) G puede ser simple

(V) Un grafo completo K_{12} tiene $\dfrac{\overset{|V|}{\overset{\downarrow}{12}}\,(\overbrace{11}^{gr(i)})}{2}$ aristas $= 66$

entonces, si saco 10 aristas, obtengo un grafo simple de 56 aristas.

c) G necesariamente tiene ciclo de Euler

(F) No hay garantía que todos los vértices tengan grados pares

d) G puede ser regular

(F) Pues $\sum_{i=1}^{12} gr(i) = 2 \times 56 = 112$ y $|V| = 12 \not| \ 112$

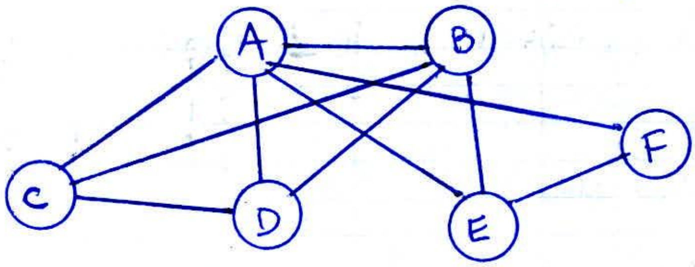
---

(15) En el conjunto de vértices de un grafo se define la Relación R:

$$v_i \, R \, v_j \iff gr(v_i) = gr(v_j) \qquad g \text{ es "grado"}$$

Se pide:

a) Hallar el conj. cociente para el sig. grafo:



$gr(A) = 5$

$gr(B) = 4$

$gr(C) = 3 = gr(D) = gr(E)$

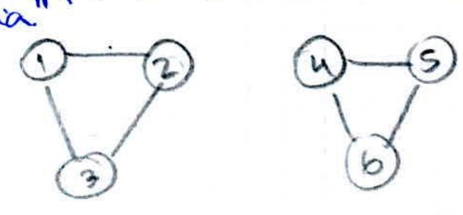
$gr(F) = 2$

Conj. cociente $= \{\underset{gr5}{\{A\}}, \underset{gr=4}{\{B\}}, \underset{gr=3}{\{C, D, E\}}, \underset{gr=2}{\{F\}}\}$

b) Indicar V o F:

"Si un grafo no es conexo, el conjunto cociente del conjunto de vértices por la Relación R tiene, al menos, dos clases de equivalencia"

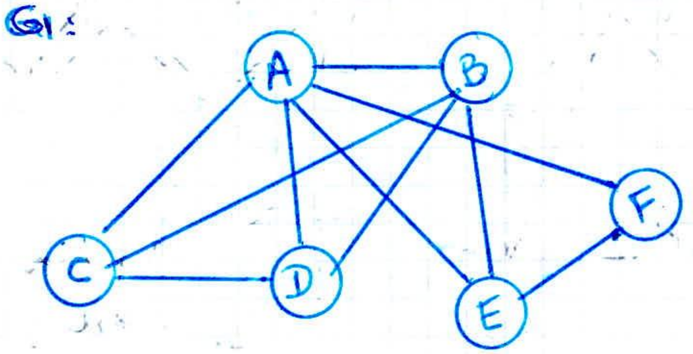
(F)



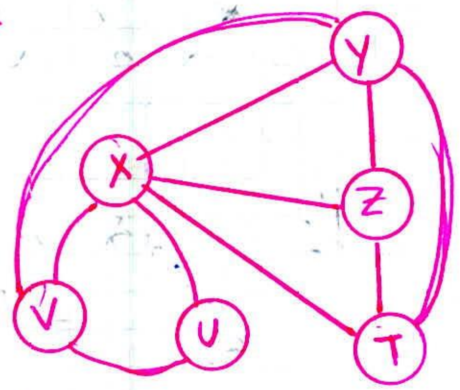
El grafo no es conexo pero todos los vértices son de grado 2 $\Rightarrow$ pertenecen a una única clase

(16) Dados los siguientes grafos G_1 y G_2:

G_1:



G_2



a) Definir un isomorfismo entre ellos. Justificar

G_1: $|V| = 6$ $\leftarrow = \checkmark \rightarrow$ G_2: $|V| = 6$

$|A| = 10$ $\leftarrow = \checkmark \rightarrow$ $|A| = 10$

G_1		G_2
gr(A) = 5	Los relaciono	gr(X) = 5
gr(B) = 4	por los grados.	gr(Y) = 4
gr(C) = 3	En los que tienen	gr(Z) = 3
gr(D) = 3	grado 3, observo los	gr(U) = 2
gr(E) = 3	vértices adyacentes	gr(V) = 3
gr(F) = 2		gr(T) = 3

$f(A) = X$ $f(B) = Y$ $f(F) = U$ $f(C) = Z$ $f(D) = T$ $f(E) = V$

G_1	A	B	F	C	D	E
A	0	1	1	1	1	1
B	1	0	0	1	1	1
F	1	0	0	0	0	1
C	1	1	0	0	1	0
D	1	1	0	1	0	0
E	1	1	1	0	0	0

$\Leftarrow$ son iguales $\Rightarrow$ ✓

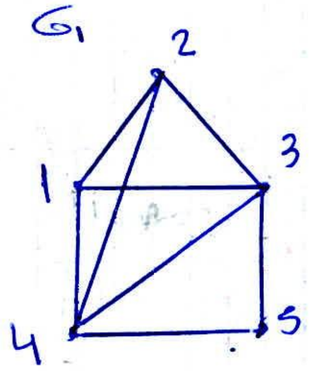
G_2	X	Y	U	Z	T	V
X	0	1	1	1	1	1
Y	1	0	0	1	1	1
U	1	0	0	0	0	1
Z	1	1	0	0	1	0
T	1	1	0	1	0	0
V	1	1	1	0	0	0

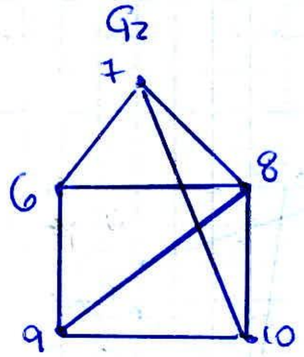
(es uno de los 2 posibles)

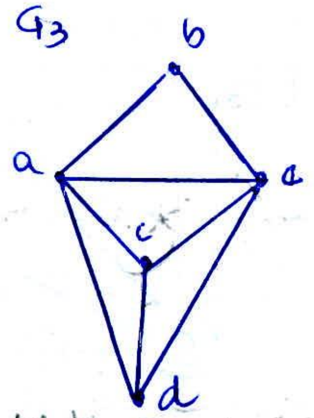
b) En el grafo G_2 indicar qué arista habría que suprimir para que X sea istmo. Justificar

Si se suprime la arista entre U y V o la que está entre V e Y, X sería un istmo

17) Dados los sig. grafos G_1, G_2 y G_3, indicar cuáles son isomorfos, justificando correctamente:







$|V_1| = 5$

$|A_1| = 8$

$|V_2| = 5$

$|A_2| = 8$

$|V_3| = 5$

$|A_3| = 8$ ✓

$gr(1) = 3 = gr(2)$

$gr(3) = 4 = gr(4)$

$gr(5) = 2$

$gr(6) = 3 = gr(9) = gr(10) = gr(7)$

$gr(8) = 4$

$gr(a) = 4 = gr(e)$

$gr(c) = 3 = gr(d)$

$gr(b) = 2$

estos 2 grafos tienen correlación con los grados de los vértices

$1 \to$ 2 - gr 3, 3 - gr 4, 4 - gr 4

$c \to$ a → gr 4, e → gr 4, d → gr 3

$f(5) = b$

$f(1) = c$

$f(2) = d$

$f(3) = a$

$f(4) = e$

G1	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	1	0	1	1	0
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	0	0	1	1	0

✓ $\Longleftrightarrow$

G3	c	d	a	e	b
c	0	1	1	1	0
d	1	0	1	1	0
a	1	1	0	1	1
e	1	1	1	0	1
b	0	0	1	1	0

(18) Indicar el valor de verdad de las seg. proposiciones:

a) Si dos grafos son isomorfos, entonces tienen la misma cantidad de vértices y de aristas

(V) Son condiciones necesarias para que sean isomorfos

b) Si dos grafos tienen la misma cantidad de vértices y aristas, son isomorfos.

(F)

$|V_1| = |V_2| = 4$

$|A_1| = |A_2| = 3$

pero G_1 tiene un vértice aislado y G_2 no

c) Si un grafo tiene un ciclo de longitud 3, entonces, todo grafo isomorfo a él debe tener un ciclo de long 3

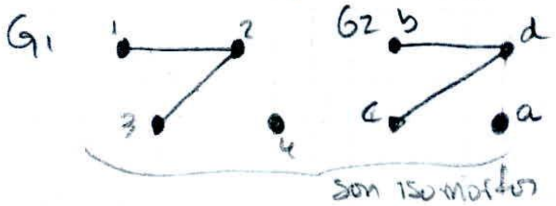
(V) Es condición necesaria para que sean isomorfos

d) Si dos grafos ~~son~~ G_1 y G_2 son isomorfos, es posible escribir sus matrices de adyacencia de tal forma que: $M_A(G_1) = M_A(G_2)$

(V) Es la mejor manera de mostrar un isomorfismo entre grafos

e) Si dadas las matrices de adyacencia $M_A(G_1) \neq M_A(G_2)$, entonces G_1 y G_2 NO son isomorfos.

(F) Si las filas y columnas se pueden acomodar y termina quedando que $M_A(G_1) = M_A(G_2)$ entonces son isomorfos



$$M_A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_A(G_1) \neq M_A(G_2)$ pero son isomorfos

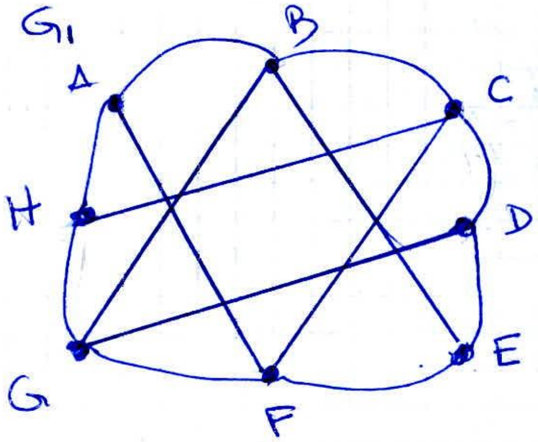
f) Si un grafo G_1 es isomorfo a otro grafo G_2 que tiene ciclo de Euler entonces todos los vértices de G_1 tienen grado par

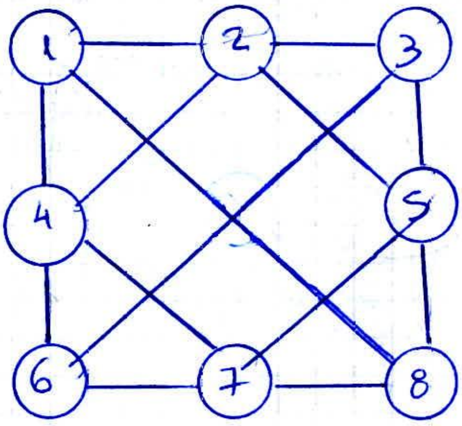
(V) Si G_2 tiene ciclo de Euler $\Rightarrow \forall v_i \in G_2 \Rightarrow gr(v_i) = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

$\xRightarrow{G_1 \text{ isomorfo } G_2} \forall v_i \in G_1 \Rightarrow g(v_i) = 2k \Rightarrow G_1$ tiene ciclo de Euler

(19) Analizar si los sig. pares de grafos son isomorfos. En caso afirmativo, definir el isomorfismo. De lo contrario, justificar

a) G_1 G_2





$|V_1| = 8 \;,\; |A_1| = 14$ $=$ ✓ $|V_2| = 8 \;,\; |A_2| = 14$

$gr(A) = 3 = gr(D) = gr(E) = gr(H)$ $gr(1) = 3 = gr(3) = gr(6) = gr(8)$

$gr(B) = 4 = gr(C) = gr(F) = gr(G)$ $gr(2) = 4 = gr(4) = gr(5) = gr(7)$

gr (3)

A — B (4), H (3), F (4)

D — C (4), E (3), G (4)

E — D (3), B (4), F (4)

H — A (3), C (4), G (4)

1 — 2 (4), 8 (3), 4 (4)

3 — 2 (4), 6 (3), 5 (4)

6 — 3 (3), 4 (4), 7 (4)

8 — 1 (3), 5 (4), 7 (4)

Observo los ciclos y sus longitudes

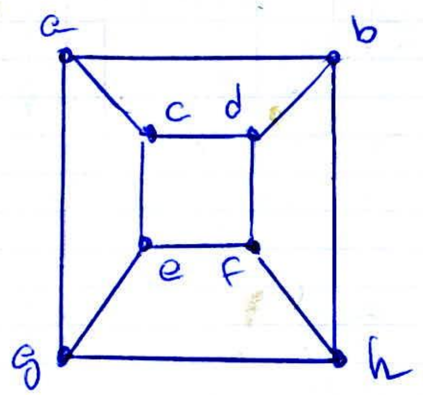
G_1 no tiene ningún ciclo de long 3 mientras que G_2 sí tiene

$\therefore$ $\boxed{\text{No son isomorfos}}$

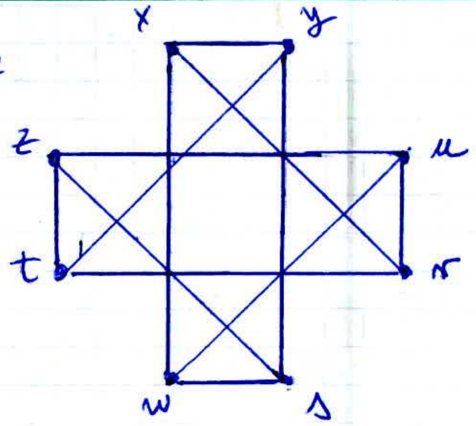
Grafos

b)

G_1



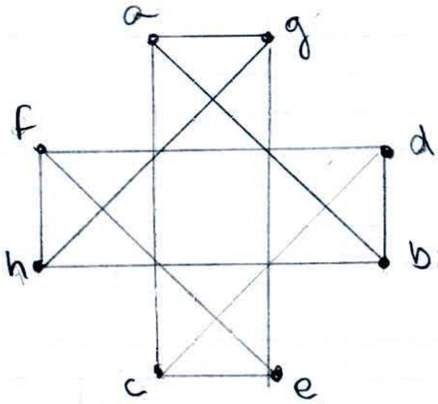
G_2



$|V_1| = 8$ $|A_1| = 12$ $|V_2| = 8$ $|A_2| = 12$

$|V_1| = |V_2|$ y $|A_1| = |A_2|$ ✓

G_1 es 3 regular = ✓ G_2 es 3 regular



$\sim$

$f(a) = x$

$f(b) = v$

$f(c) = w$

$f(d) = u$

$f(e) = s$

$f(f) = z$

$f(g) = y$

$f(h) = t$

G_1	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	1	1	0	0	0	1	0
b	1	0	0	1	0	0	0	1
c	1	0	0	1	1	0	0	0
d	0	1	1	0	0	1	0	0
e	0	0	1	0	0	1	1	0
f	0	0	0	1	1	0	0	1
g	1	0	0	0	1	0	0	1
h	0	1	0	0	0	1	1	0

G_2	x	v	w	u	s	z	y	t
x	0	1	1	0	0	0	1	0
v	1	0	0	1	0	0	0	1
w	1	0	0	1	1	0	0	0
u	0	1	1	0	0	1	0	0
s	0	0	1	0	0	1	1	0
z	0	0	0	1	1	0	0	1
y	1	0	0	0	1	0	0	1
t	0	1	0	0	0	1	1	0

= ✓

II DIGRAFOS

20) Sea el digrafo $D = (V, A, \varphi)$ con los conjuntos $V = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ y la función de incidencia dada por la sig. tabla:

x	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\varphi(x)$	(2,1)	(1,3)	(4,3)	(2,3)	(3,4)	(5,4)	(3,5)	(6,4)	(3,6)

a) Hacer el diagrama e indicar el grado positivo y negativo de cada vertice

entran

$g^+(1) = 1$

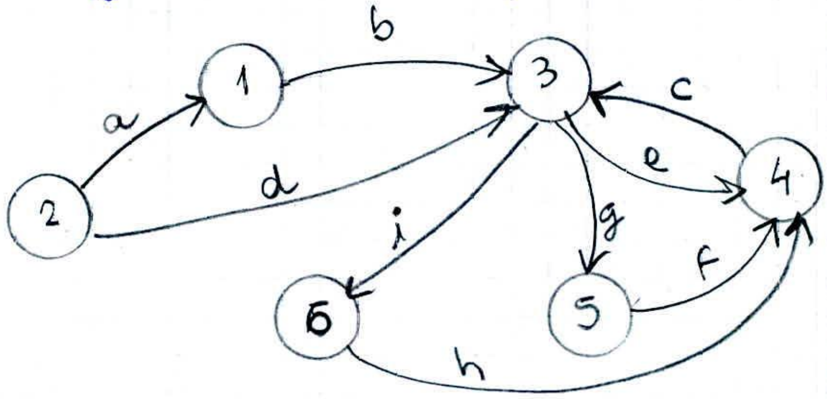
$g^+(2) = 0$

$g^+(3) = 3$

$g^+(4) = 3$

$g^+(5) = 1$

$g^+(6) = 1$



salen

$g^-(1) = 1$

$g^-(2) = 2$

$g^-(3) = 3$

$g^-(4) = 1$

$g^-(5) = 1$

$g^-(6) = 1$

b) Escribir las matrices de adyacencia y de incidencia

$$M_a(D) = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

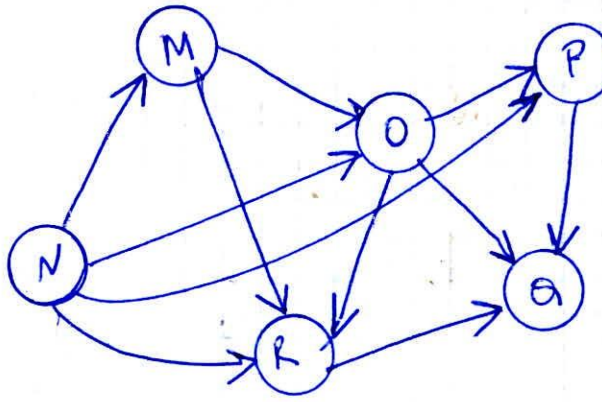
$$M_i(D) = \begin{array}{c|ccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$1 \to$ sale
$-1 \to$ llega

c) Analizar si existe algún camino de Euler

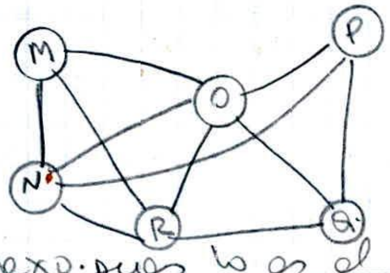
No existe pues del vertice 2 salen 2 aristas pero no ingresa ninguna, entonces, se pasa por una o por la otra

(21) Dado el sig. digrafo:



a) Indicar si el digrafo es conexo y si es fuertemente conexo. Justificar

Grafo asociado



No es fuertemente conexo:

a N no llegan aristas ∴ no se conectan desde otro vértice hacia N

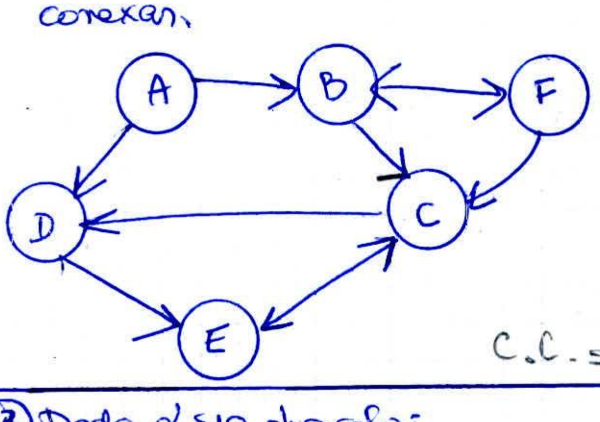
es conexo. pues lo es el grafo asociado $\boxed{\text{ES CONEXO}}$

b) ¿Hay algún pozo? ¿Y alguna fuente?

Hay pozo y fuente: Fuente: N (solo salen aristas)
Pozo: Q (solo llegan aristas)

---

(22) Dado el sig digrafo; analizar si es conexo, fuertemente conexo. De no ser fuertemente conexo, indicar componentes fuertemente conexas.



ES conexo pues lo es su grafo asociado

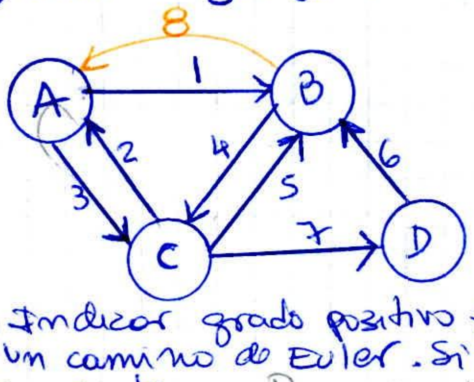
No es fuertemente conexo pues de B no se llega a A (∄ camino)

Componentes fuertemente conexas:

C.C. = {A}, {B, F}, {C, D, E}

---

(23) Dado el sig digrafo:



a) ¿ES conexo? ¿Es fuertemente conexo?

ES conexo y también fuertemente conexo, pues existen todos los caminos necesarios como para ir de un vértice a otro

b) Indicar grado positivo y negativo de todos los vértices y, si es posible, un camino de Euler. Si no lo es, indicar qué aristas agregar para que exista. Para que haya camino de Euler habría que agregar 8

$g^+(A) = 1$ $g^+(B) = 3$ $g^+(C) = 2$ $g^+(D) = 1$

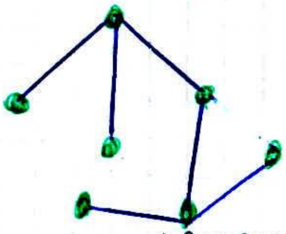
$g^-(A) = 2$ $g^-(B) = 1$ $g^-(C) = 3$ $g^-(D) = 1$

{C, 7, D, 6, B, 4, C, 2, A, 3, C, 5, B, 8, A, 1, B}

III ARBOLES

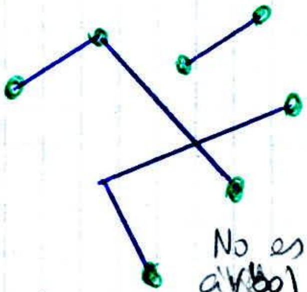
(24) Indicar cuáles de los sig. grafos es árbol. Para los que no lo sean, analizar si son bosques y, en caso afirmativo, indicar cantidad de componentes:

a)



Es árbol (conexo y sin ciclos)

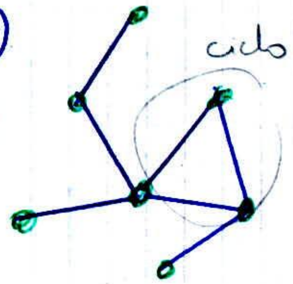
b)



No es árbol

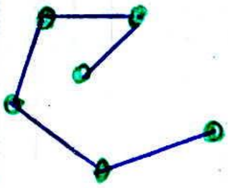
Es bosque: tiene 3 componentes

c)



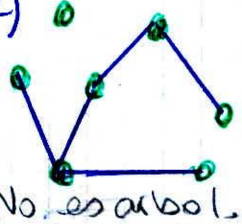
No es árbol ni bosque

d)



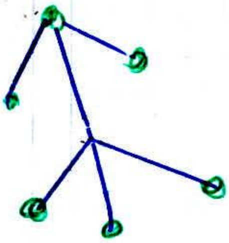
Es árbol

e)



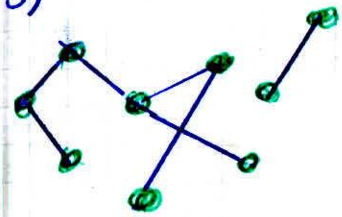
No es árbol. Es bosque y tiene 2 componentes

f)



Es árbol

g)



No es árbol. Es bosque con 2 comp.

---

(25) Demostrar que:

a) En todo árbol se cumple que: $|V| = |A| + 1 \rightarrow \boxed{|A| = |V| - 1}$

Vamos a probar que si un árbol tiene n vértices $\Rightarrow$ tiene $n-1$ aristas

- Paso base: $n = 1 \xrightarrow{\text{1 solo vértice}} |A| = 0 \Rightarrow 0 = 1 - 1$ ✓
- Paso inductivo: H.I) $|V| = h \Rightarrow |A| = h - 1 \Rightarrow |A_h| = h - 1$
  T.I) $|V| = h+1 \Rightarrow |A| = h \Rightarrow |A_{h+1}| = h$
- Dem: $|V| = h+1 \Rightarrow$ agrego un vértice. Si agrego un vértice, no puede quedar aislado pues dejaría de ser conexo $\Rightarrow$ si agrego un vértice tengo que agregar una arista.

cant de aristas con h+1 vértices

$\rightarrow |A_{h+1}| = |A_h| + 1 \overset{HI}{=} (h-1) + 1 = h \Rightarrow \boxed{|A_{h+1}| = h}$

b) La suma de los grados de los vértices de todo árbol de n vértices es $2n-2$

$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2n - 2$

Como es árbol, cada vez que agregamos un vértice, agregamos 1 arista que incide en 2 vértices

- Paso base: $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} gr(v_i) = gr(v_1) = 0$ pues no tiene aristas

$2\times 1 - 2 = 0$ $\Big\} = \checkmark$

- Paso inductivo: H I) $\sum_{i=1}^{h} gr(v_i) = 2h-2$

T I) $\sum_{i=1}^{h+1} gr(v_i) = 2(h+1)-2 = 2h$

Dem: $\sum_{i=1}^{h+1} gr(v_i) = \sum_{i=1}^{h} gr(v_i) + \underbrace{\overbrace{gr(v_{h+1})}^{1}+1}_{\text{incidencia de la última arista}} = \sum_{i=1}^{h} gr(v_i) + 2 =$ → por ser árbol

$\overset{H.I}{=} 2h-2+2 = 2h \checkmark$

c) todo árbol es un grafo bipartito

$|A| =$

Árboles

(26) Hallar la cantidad de vértices de un árbol, sabiendo que tiene 2 vértices de grado 2, 2 vértices de grado 3, 3 vértices de grado 4 y los restantes de 1

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2|A| = 2n-2 = 2(n-1) \Rightarrow |A| = n-1 \quad \text{(I)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + x \cdot 1 = 22 + x$$

$$|V| = 2 + 2 + 3 + x = \boxed{7+x=n} \overset{\text{I}}{\Longrightarrow} |A| = 7+x-1 = \boxed{6+x=|A|}$$

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 22+x = 2(6+x) \Rightarrow 22+x=12+2x \Rightarrow \boxed{x=10}$$

$$|V| = 7+x = \boxed{17=|V|}$$

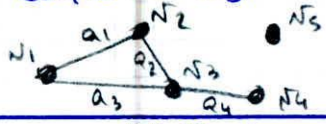
(27) Indicar V o F, justificando correctamente:

a) Algún vértice interno de un árbol puede no ser punto de corte

(F) todos los nodos internos son istmos pues si se quita alguno, se desconecta el grafo (deja de ser conexo)

b) todos los grafos $G=(V,A,\varphi)$ con $|A|=|V|-1$ son árboles

(F) $|A| = 4$, $|V| = 5$ y no es árbol:



(28) Sea $G=(V,A,\varphi)$ un grafo con 42 vértices de grado 2, 15 de grado 3, 21 de grado 4, 7 de grado en 5 y el resto de grado 1. Se pide:

a) ¿Podría tratarse de un árbol? Justificar. En caso afirmativo, indicar la cantidad de vértices y aristas del árbol.

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 42 \times 2 + 15 \times 3 + 21 \times 4 + 7 \times 5 + x \cdot 1 = 248 + x = 2|A|$$

$$|V| = 42 + 15 + 21 + 7 + x = 85 + x$$

$$|A| = |V| - 1 \Rightarrow |A| = 84 + x \rightsquigarrow \quad 248 + x = 2(84+x) \Rightarrow \boxed{x = 80}$$

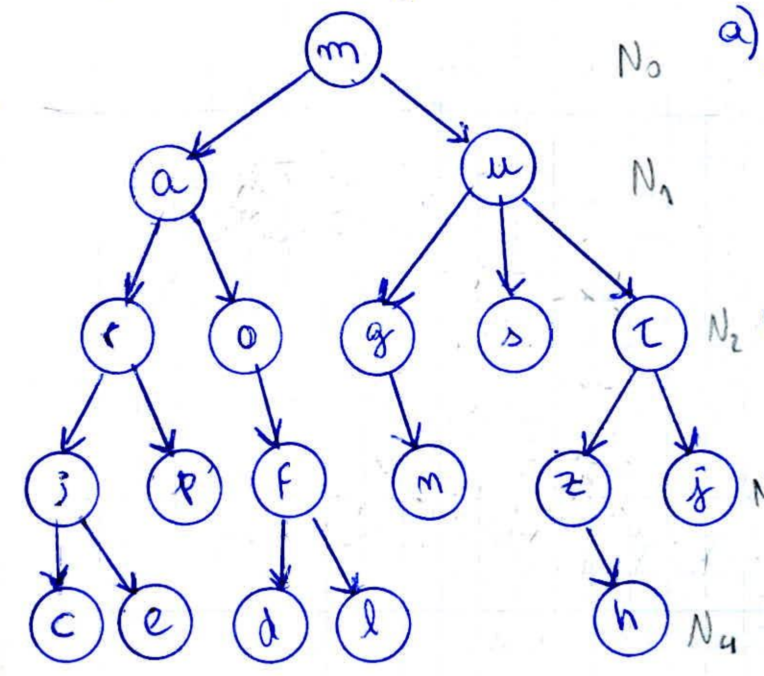
$|V| = 165$ $\quad |A| = 164$ $\quad$ Con esos valores de $|A|$ y $|V|$ podría ser árbol

b) Si además se supiera que $|A| = 130$ ¿cuántas aristas habría que suprimir para que se obtenga un árbol?

$$248 + x = 2 \times 130 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow |V| = 85 + 12 = 97 \Rightarrow |A| = 96$$

$130 - 96 = 34$ son las aristas que habría que quitar

(29) Dado el siguiente árbol dirigido con raiz:



a) Indicar cuál es la raiz y cuáles son las hojas.

Raiz: m

Hojas: c, e, p, d, l, m, s, h, j

b) Indicar el padre y los hijos de i

Padre de i: r

Hijos: c, e

c) Indicar todos los descendientes de u:

Desc.: g, n, s, t, z, j, h

d) Analizar si es un árbol balanceado

No lo es pues hay hojas en el nivel 2 y en el 4 (dif > 1)

e) Indicar todos los vértices del nivel 2

r, o, g, s, t

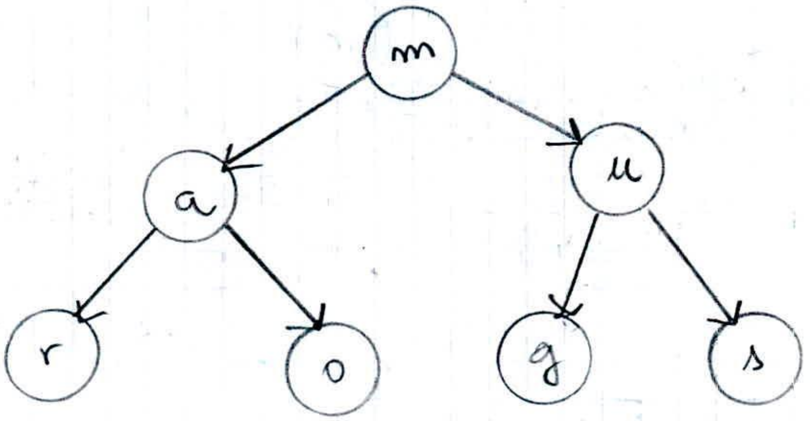
f) Clasificarlo como n-ario (indicar el valor de n) y si es regular o completo.

m = 3 (u tiene 3 hijos), **no** es regular ni completo.

Regular: si todos los vértices (excepto las hojas) tienen el mismo nivel

Completo: si todas sus hojas están en el mismo nivel

g) Indicar un subárbol que sea binario, regular, de altura 2



Árboles

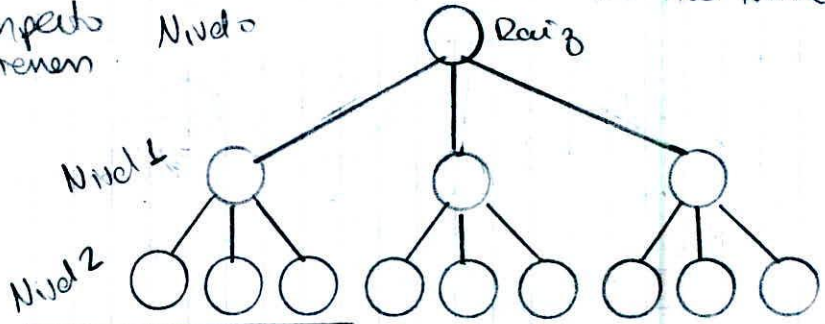
(30) Hallar y responder, justificando:

a) La cantidad de hojas de un árbol ternario regular completo de altura h

los hojas están en el mismo nivel

ternario regular completo
TODOS los padres tienen 3 hijos

en Nivel 0 : 1
en Nivel 1 : 3
en Nivel 2 : 9
...
en Nivel h : 3^h



$\boxed{\# \text{hojas} = 3^h}$

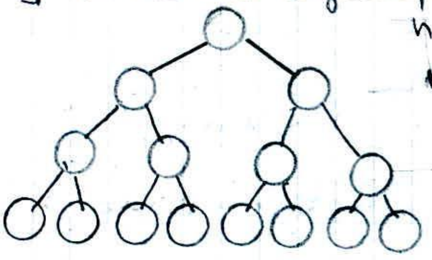
b) La cantidad total de vértices de un árbol binario regular completo de altura h

Niv. 0 : $1 = 2^1 - 1$
Niv 1 : $3 = 2^2 - 1$
Niv 2 : $7 = 2^3 - 1$
3 : $15 = 2^4 - 1$

$\boxed{|V| = 2^{h+1} - 1}$

c) La altura mínima de un árbol binario que tenga 1000 vértices

La altura mínima se dará cuando sea un árbol regular (todos los vértices de = grado, salvo los de las hojas) y completo



$h=0$ $|V| = 1$
$h=1 \to |V| = 3$
$h=2 \to |V| = 7$
$h=3 \to |V| = 15$

$1000 = 2^{h+1} - 1$
$1001 = 2 \cdot 2^h$
$500{,}5 = 2^h$

$\to \ln(500{,}5) = \ln(2^h)$
$\ln(500{,}5) = h \ln(2)$
$\frac{\ln(500{,}5)}{\ln(2)} = h$
$h = 8{,}967$

$\boxed{h_{\text{mínima}} = 9}$

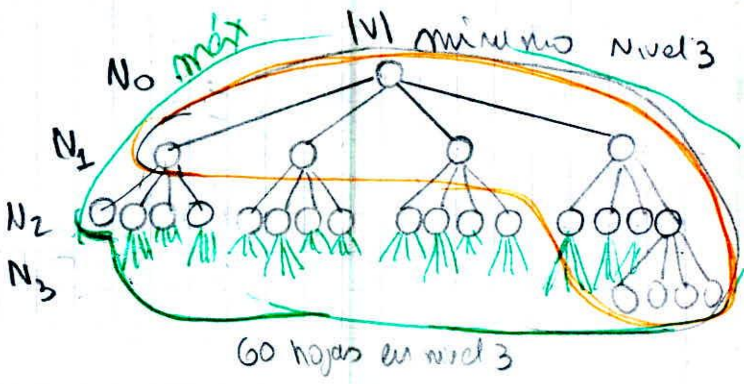
(en $h=8$ hay 511 vértices)

d) Las cantidades máxima y mínima de vértices de un árbol cuaternario regular no completo de $h=3$
En cada caso, indicar cantidad de hojas

	completo $\lvert V\rvert$	No completo $\lvert V\rvert$ máx	$\lvert V\rvert$ mín
N_0 :	1	1	1
N_1 :	5	4	4
N_2 :	21	21	9
N_3 :	85	81 + 60	13 ⇒ 10 hojas

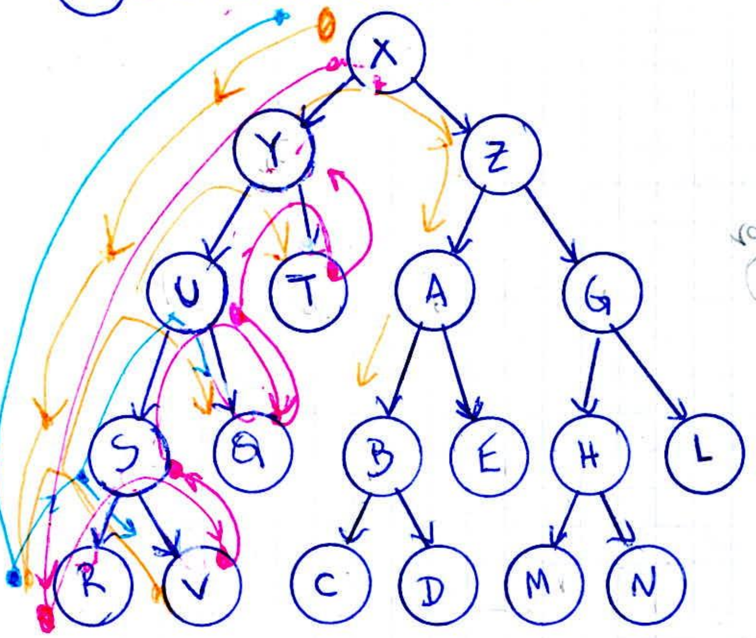
$\boxed{|V|_{mín} = 13, \text{ hojas} = 10}$ ✓

$\boxed{|V|_{máx} = 81, \text{ hojas} = 61}$ ✓



60 hojas en nivel 3

(31) Sea el árbol binario:



a) Dar el recorrido en orden previo (Pre orden)   POLACA

1° por rama izquierda, empezando por la raíz

raíz

XYUSRVQTZABCDEGHMNL

b) Dar el recorrido en orden simétrico (in-orden)   USUAL o INFIJA

Por rama izquierda hasta una hoja. Se anota, luego el padre y, si hay, ~~hoja~~ hermano. Y se sigue hacia arriba

raíz

RSVUQYTXCBDAEZMHNGL

c) Dar el recorrido en orden posterior (post oren)   POLACA INVERSA

Se empieza x rama izq pero se recorre ela rama derecha.
(1° hojas después raíz)

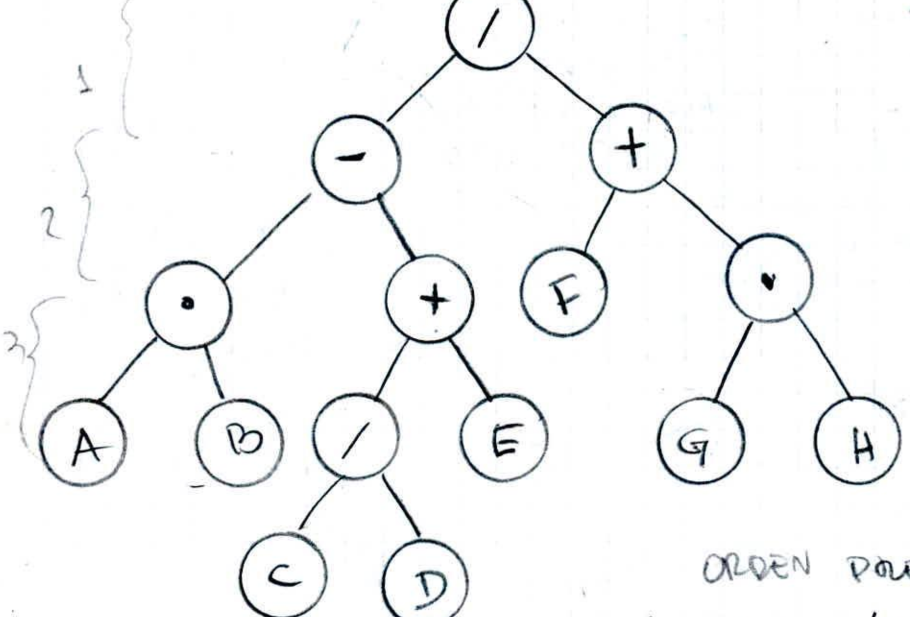
RVSQUTYCDBEAMNHLGZX raíz

---

(32) Para la siguiente expresión dada en notación POLACA INVERSA:

AB•CD/E+-FGH•+/ raíz

Se pide recuperar el árbol, indicar la raíz, las hojas, la altura y si es balanceado
Dar el recorrido del árbol en orden previo (notación polaca)



Raíz:
H

HOJAS:
A, B, C, D, E, F, G, H

ALTURA:
4

No es balanceado

ORDEN PREVIO:

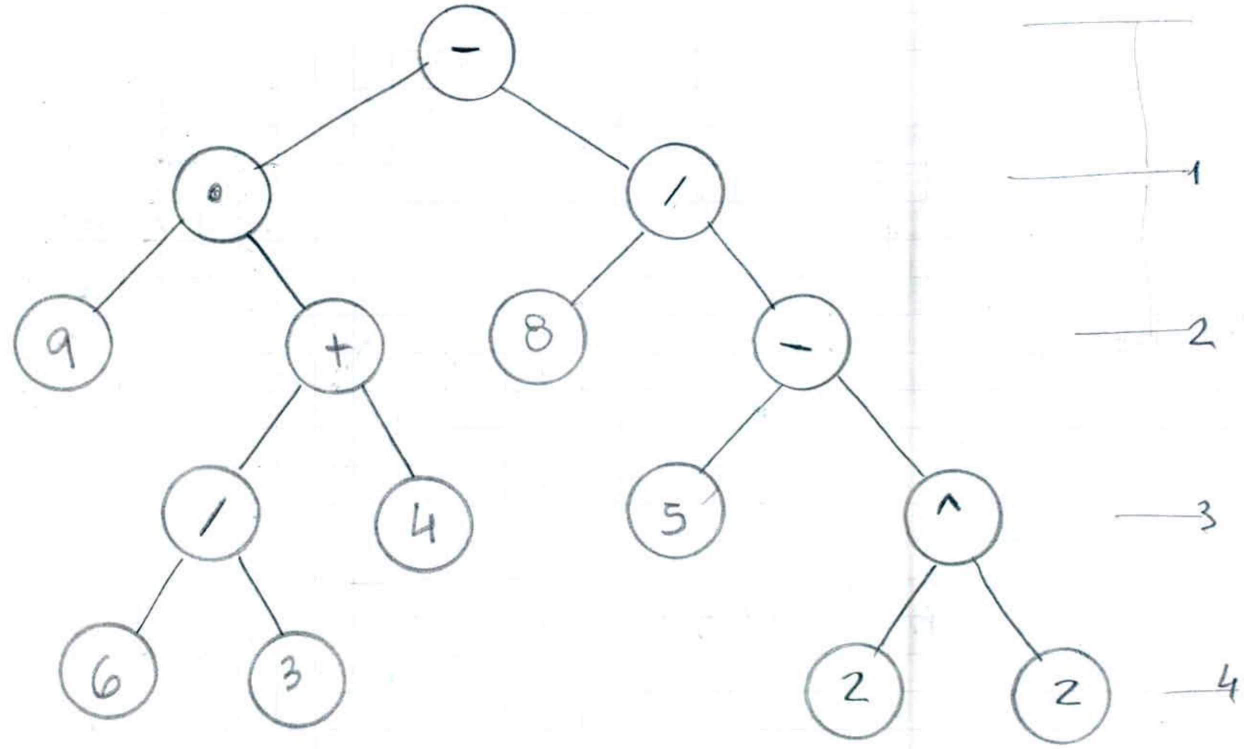
/-•AB+/CDE+F•GH

Árboles

33) Dada la expresión en notación polaca inversa:

9 6 3 / 4 + • 8 5 2 2 ^ − / −

a) Hallar el árbol correspondiente, indicar su altura y si es balanceado



Altura = 4

No está balanceado : tiene hojas en el nivel 2 y en el 4

b) Calcular el resultado de la expresión

$$9 \cdot \left[\left(\underbrace{6/3}_{2}\right) + 4\right] - 8/(5-2^2) =$$

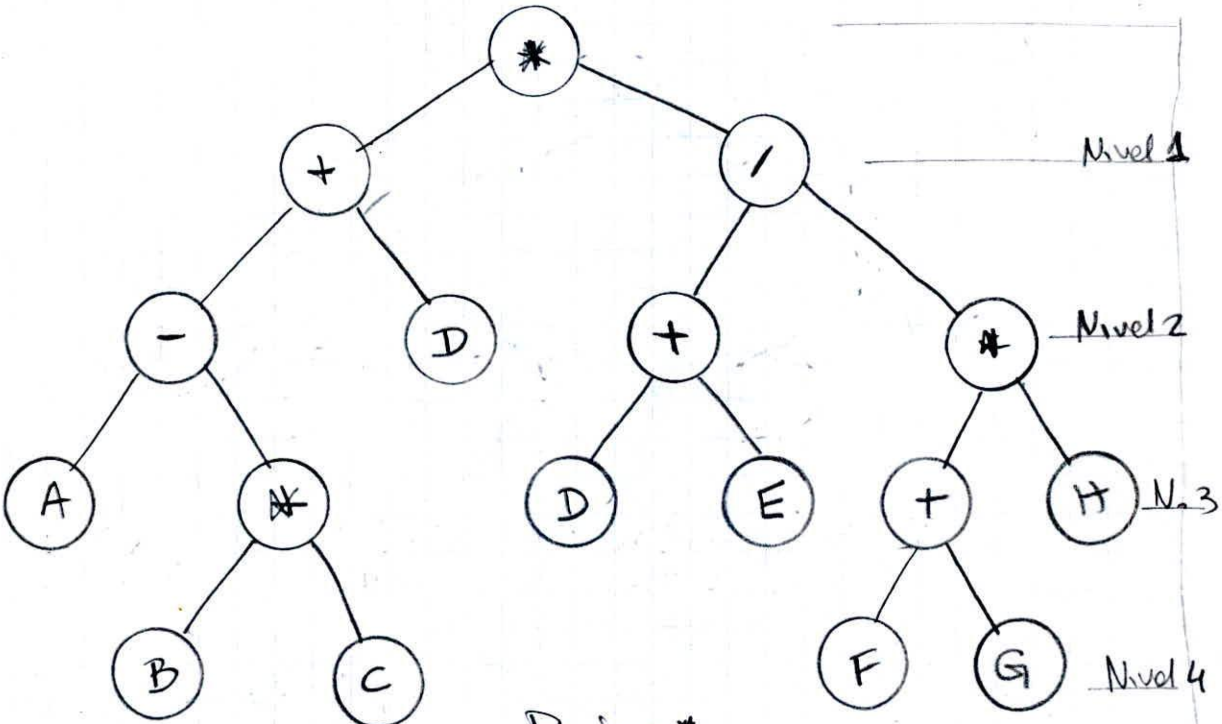
$$= 54 - 8 = \boxed{46 = \text{resultado}}$$

(34) Sea la sig. expresión dada en notación polaca:

$$* + - A * B C D / + D E * + F G H$$

Se pide:

a) Recuperar el árbol, indicar la raiz, las hojas y los vértices intermedios



Raiz: *

Hojas: A B C D D E F G H

Vértices intermedios: -, *, +, +, /, *, +

b) Dar el recorrido del árbol en orden simétrico (notación usual o infija)

$A - B * C + D * D + E / F + G * H$

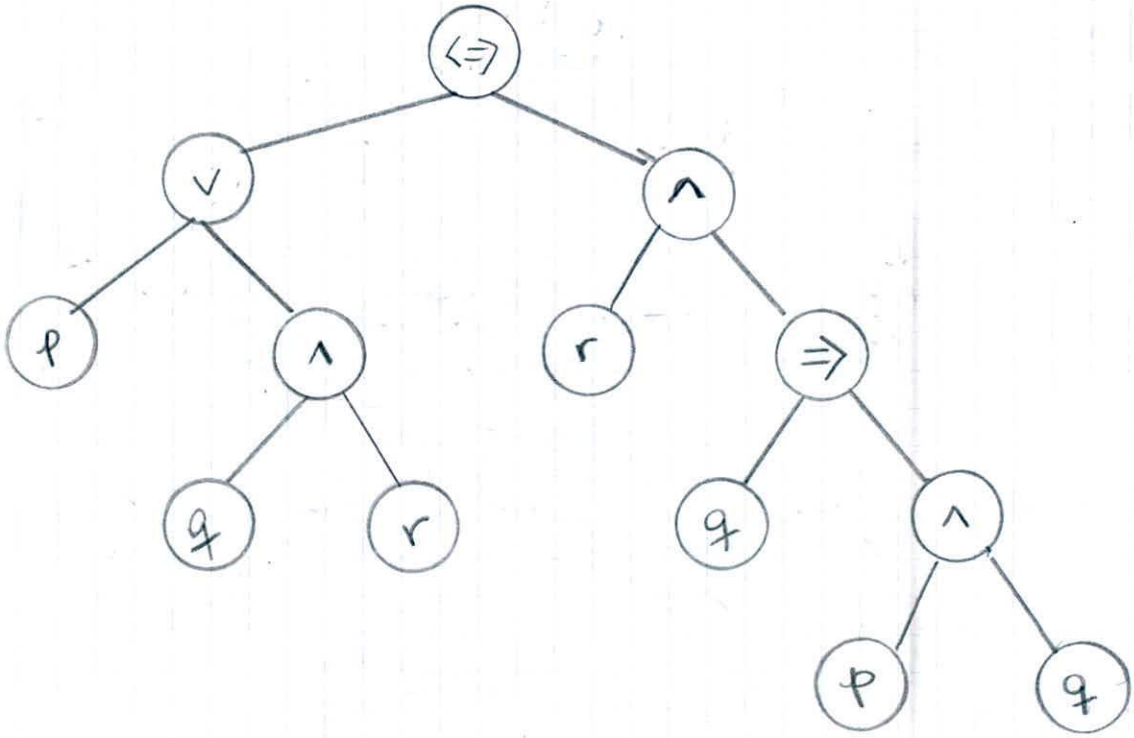
$[A - B * C + D] * [(D+E) / ((F+G) * H)]$

Árboles

(35) Construir el árbol correspondiente a la expresión lógica:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow r \wedge (q \Rightarrow p \wedge q)$$

Recorrer el árbol en orden previo y en orden posterior



- Orden previo (preorden)

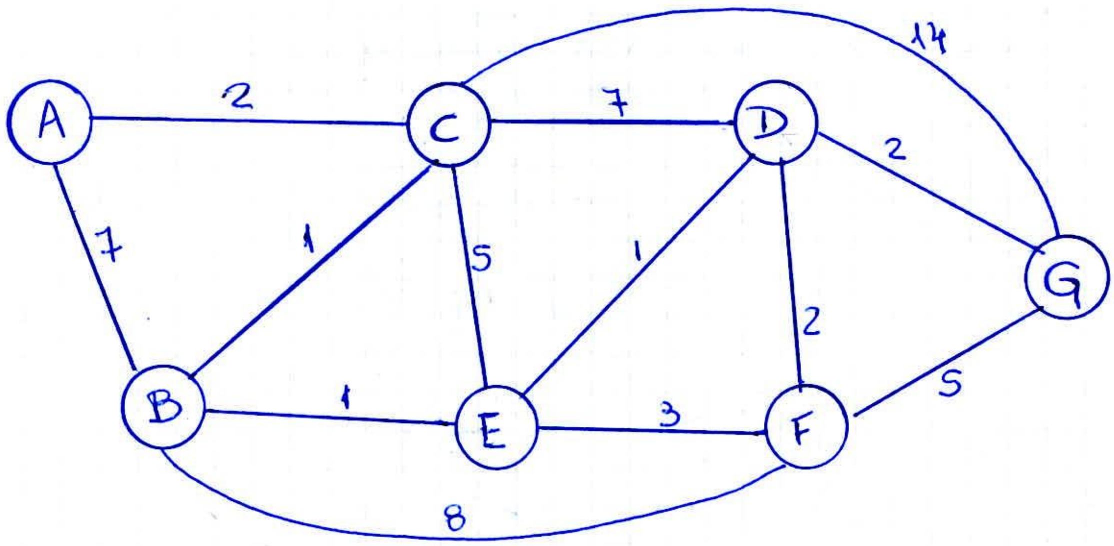
  $\Leftrightarrow, \vee, p, \wedge, q, r, \wedge, r, \Rightarrow, q, \wedge, p, q$

- Orden posterior (post orden)

  $p \ q \ r \ \wedge \ \vee \ r \ q \ p \ q \ \wedge \ \Rightarrow \ \wedge \ \Leftrightarrow$

IV EJERCICIOS APLICADOS

36) El sig. grafo representa 7 ciudades (A, B, C, D, E, F y G) unidas por carreteras (representadas por las aristas) siendo, los valores que aparecen sobre ellas, los costos de circulación:



a) ¿Es posible recorrer todas las carreteras una sola vez? ¿De qué ciudad hay que partir y a cuál llegar? Justificar

a): Camino de Euler : Se puede pero tiene todos vértices con grado par salvo 2. Se comienza por un vértice de grado impar

G D C A B F G C B C E D F E C

b) ¿Qué arista se debe eliminar para que se puedan recorrer todas las carreteras una sola vez y volver al punto de partida? Indicar el ciclo euleriano

Si se elimina la carretera que une C con G se logra obtener un ciclo euleriano

G D C A B E F D E C B F G

c) Si se desea recorrer todas las ciudades una sola vez por cada una sin necesidad de pasar por todas las carreteras, y con el menor costo ¿qué ciclo se recomienda? Esto sería hallar un ciclo hamiltoniano de costo mínimo

A C D G F E B A

$2 + 7 + 2 + 5 + 3 + 1 + 7 = 27$

Ej. Aplicados

37) Alicia hizo una reunión y asistieron sus amigas Beatriz, Cecilia, Diana, Else, Fernanda y Gabriela.

Beatriz conversó exactamente con 3 de los restantes, Cecilia y Elsa conversaron con 2 del resto cada una.
Diana, Fernanda y Gabriela conversaron con una sola de los restantes cada una.

En total hubo 7 conversaciones.

Responder:

a) ¿Con cuántas personas conversó Alicia?

Cada conversación es una arista. Cada persona es un vértice.

$$\sum_{i=1}^{7} gr(v_i) = 2|A| = 14 = 1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1 + \underset{\text{Alicia}}{1}\times \underset{\text{conversaciones}}{x}$$

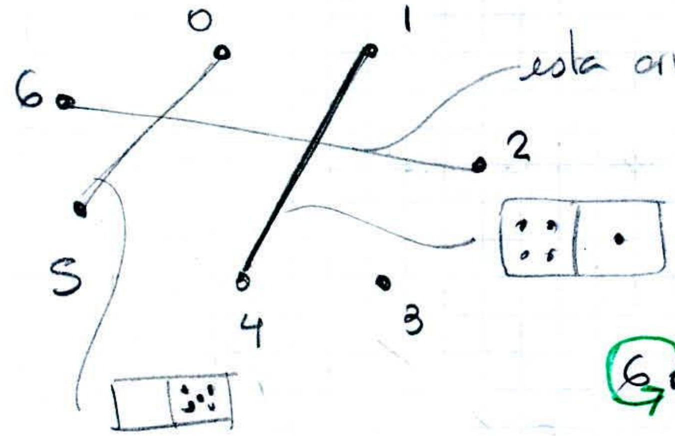
$$14 = 10 + x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \boxed{\text{Alicia habló con 4 personas}}$$

b) Con esta información solamente ¿se puede decir exactamente con quiénes habló Alicia?

No se puede saber.

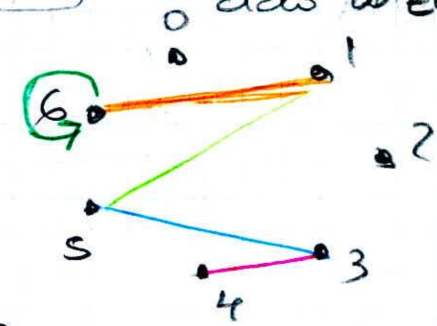
---

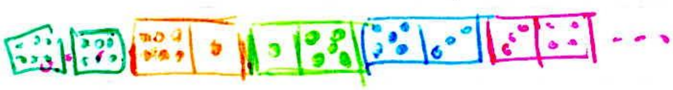
38) Analizar si es posible construir un circuito con todas las fichas de DOMINÓ de manera que las dos mitades adyacentes sean iguales.
Sugerencia: representar los 7 números (0 al 6) como los vértices de un grafo y las aristas van a representar todas las fichas.



esta arista representa a la ficha 6,2

Entonces, lo que se quiere analizar es si existe un ciclo de Euler





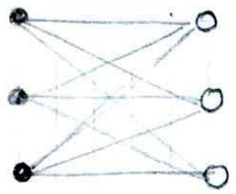
Si tengo un grafo completo K_7 más los bucles, todos los vértices tienen grado 8 $\Rightarrow$ son pares $\Rightarrow \exists$ ciclo de Euler ✓

(39) Hace muchos años los paises de una isla se agruparon en dos alianzas. El azar o la astucia de los politicos hizo que cada país tuviera frontera en común con exactamente tres paises de la alianza enemiga y ninguno de la misma alianza.

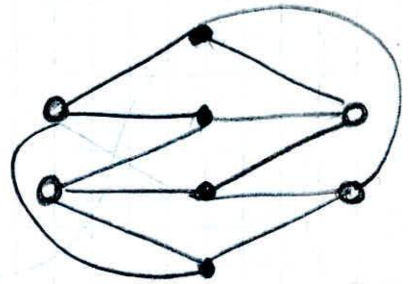
Se pregunta:

a) ¿cuál es el mínimo número de paises que podia tener la isla? (utilizar el concepto de grafo dual para deducirlo)

Grafo bipartito, $K_{3,3}$



En la respuesta (de la cátedra) dice que debe ser un grafo plano y que debe tener 8 vértices

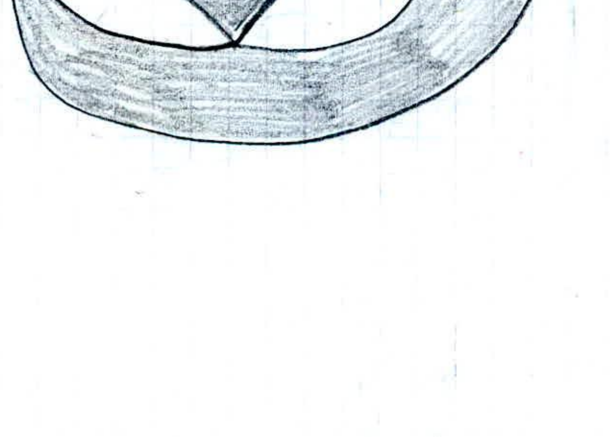


b) Un viajero dice que en la isla habia 11 paises ¿podemos creerle?

11 paises $\Rightarrow \sum_{i=1}^{11} g(v_i) = 33$ pero la suma debe ser par

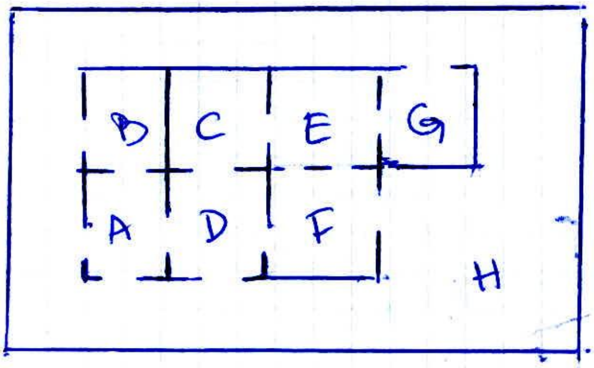
$\boxed{\text{No es posible}}$

c) Mostrar una cartografía posible



Ej. aplicado

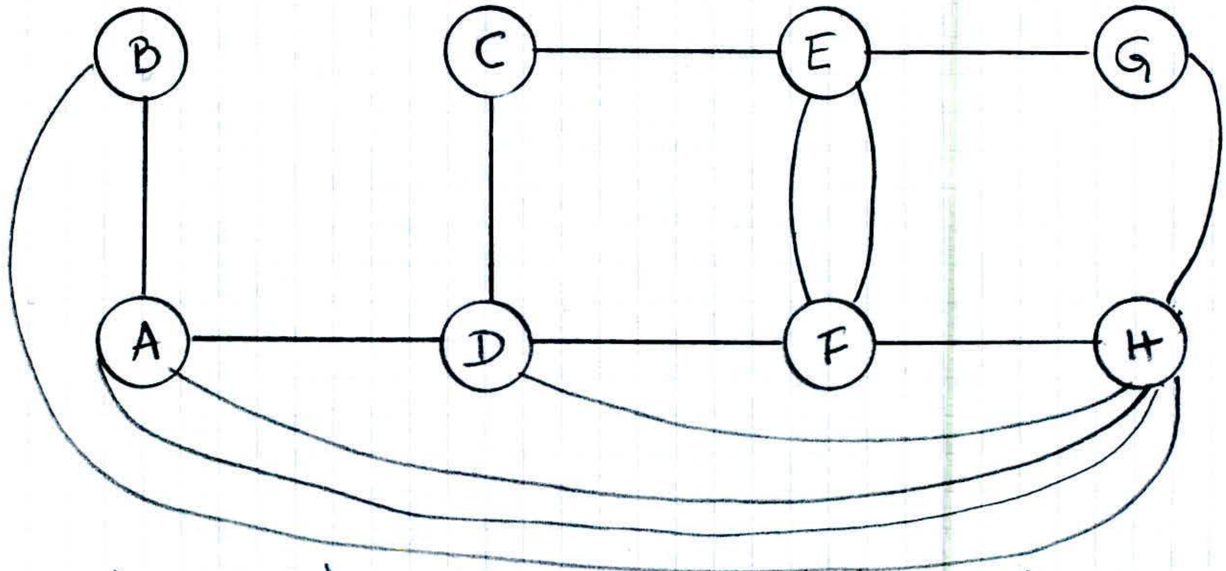
40 Sea la planta de una construcción:



Se quiere saber si es posible pasar por las 7 habitaciones A, B, C, D, E, F, G y el pasillo exterior H atravesando cada puerta una sola vez.

Para resolverlo hay que construir el grafo "dual" y ver si es un grafo euleriano

Grafo dual: es un grafo que tiene un vértice por cada región y una arista uniendo a dos regiones vecinas



Cada arista representa a pasar por una puerta. Entonces se quiere saber si hay un CAMINO de EULER. Para eso, observo los grados de los vértices: son pares ∴ se puede pasar por todas las puertas 1 sola vez